

## RELACIONES EN GENERAL Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA

## I. RELACIONES

1. Sean  $A = \{1,2,3\}$  y  $B = \{2,4,6,8\}$

- a) Indique la cantidad de pares del producto cartesiano y la cantidad de relaciones diferentes que se pueden definir de A en B.
- b) Exprese cada una de las siguientes relaciones de A en B por extensión, indique dominio, imagen, relación inversa y relación complementaria.
- $R_1 = \{(x,y) \in AXB / 2x \leq y\}$
  - $R_2 = \{(x,y) \in AXB / x + y \text{ es par}\}$
  - $R_3 = \{(x,y) \in AXB / y = x^2\}$
  - $R_4 = \{(x,y) \in AXB / y \leq 7\}$

2. Dados los siguientes conjuntos:  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{x,y,z\}$ ,  $C = \{m,n\}$ ,  $D = \{a,b,c,d\}$

- a) Indique si las siguientes relaciones son funciones. En caso afirmativo, clasifíquelas en inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
- $R_1 : A \rightarrow B / R_1 = \{(1,x), (2,x), (3,y)\}$
  - $R_2 : A \rightarrow B / R_2 = \{(1,z), (2,x), (3,y)\}$
  - $R_3 : A \rightarrow B / R_3 = \{(1,x), (1,y), (2,x), (3,z)\}$
  - $R_4 : A \rightarrow C / R_4 = \{(1,m), (2,n)\}$
  - $R_5 : A \rightarrow C / R_5 = \{(1,n), (2,n), (3,n)\}$
  - $R_6 : A \rightarrow C / R_6 = \{(1,m), (2,m), (3,n)\}$
  - $R_7 : A \rightarrow D / R_7 = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$
  - $R_8 : A \rightarrow D / R_8 = \{(1,a), (2,b), (3,c), (3,d)\}$
- b) Complete: Para que exista una función biyectiva entre dos conjuntos finitos, sus cardinales deben ser .....

3. Siendo  $R: A \rightarrow B$  y  $S: a \rightarrow B$ , indique el valor de verdad, demuestre o justifique, según corresponda:

- a)  $|R| = |R^{-1}|$
- b)  $|R| = |\bar{R}|$
- c)  $|R| \leq |R \cup S|$
- d)  $|R| > 0$
- e)  $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$
- f)  $\text{Dom}(\bar{R}) = A - \text{Dom}(R)$
- g)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- h)  $R \subseteq S \Rightarrow \bar{S} \subseteq \bar{R}$

4. Un grupo de enfermeras: {Alicia, Beatriz, Candela, Dora} visitaron una aldea en la que había dos enfermos que pueden padecer un virus muy raro. En la siguiente tabla se muestra quién tuvo contacto directo con cada uno de los enfermos.

	Alicia	Beatriz	Candela	Dora
Enfermo 1	si	si	si	no
Enfermo 2	no	si	no	si

Luego, las cuatro enfermeras se cruzaron en el camino con tres niños: Juan, Luca y Facundo, y los saludaron con abrazos. Se muestran los abrazos que hubo:

	Alicia	Beatriz	Candela	Dora
Juan	si	no	si	no
Luca	si	si	no	no
Facundo	no	no	no	si

- Represente, mediante diagramas de Venn, los tres conjuntos e indique, con aristas, los contactos que hubo tanto entre enfermos y enfermeras ( $R_1$ ) como entre enfermeras y niños ( $R_2$ ).
- Halle la relación compuesta  $R_2 \circ R_1$  para saber qué niño puede contagiarse el virus de cada enfermo.
- Si se supiera con certeza que uno solo de los enfermos tiene el virus extraño, ¿cuál niño podemos asegurar que también lo tiene?

## II. MATRICES BOOLEANAS

5. Dadas las siguientes matrices booleanas  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Halle:  $C = A \vee B$ ,  $D = A \wedge B$ ,  $F = A^t$ ,  $G = \bar{B}$

6. Dadas las siguientes matrices booleanas  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Halle el producto matricial  $M \cdot P$  ¿es posible  $P \cdot M$ ? Justifique

7. Sean  $A, B, C \in \{0,1\}^{n \times n}$  Indique Verdadero o Falso, justificando:

- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- $(A \wedge B)^t = A^t \wedge B^t$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $\overline{A \vee B} = \bar{A} \vee \bar{B}$
- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $A \wedge (B \cdot C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

### III. RELACIONES

8. Sean las siguientes relaciones  $R, S$  y  $T$  en los conjuntos indicados:

En  $A = \{x, y, z, t\}$   $R = \{(x,x), (x,y), (x,z), (y,y), (z,t), (z,z), (t,t)\}$

En  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  se define la relación  $S$  tal que:  $aSb \Leftrightarrow a + b = 8$

En  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  se define la relación  $T$  tal que:  $aTb \Leftrightarrow a \geq b + 2$

En  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  se define la relación  $Y$  tal que:  $aYb \Leftrightarrow a^2 = b^2$

- Haga el digrafo de cada relación
- Halle la matriz de cada relación
- Analice si cada una cumple las propiedades: reflexiva, a-reflexiva, simétrica, a-simétrica, antisimétrica y transitiva

9. Sea el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Haga el digrafo de una relación  $R$ , tal que:

- Sea antisimétrica, no a-simétrica y no transitiva
- Sea simétrica, no reflexiva y transitiva
- Tenga solo tres pares ordenados, sea simétrica y antisimétrica

10. Considere las relaciones  $R$  y  $S$  definidas en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  tales que:

$$xRy \Leftrightarrow x \geq 2y \quad xSy \Leftrightarrow (-1)^x = (-1)^y$$

- Halle las matrices de las relaciones  $M_{(R)}$  y  $M_{(S)}$
- Halle, operando matricialmente,  $M_{(R \cap S)}, M_{(R \cup S)}, M_{(R^{-1})}, M_{(\bar{S})}, M_{(S \circ R)}$
- Analice, a través de la matriz, si  $R \cap S$  es asimétrica y si es transitiva

11. Analice las propiedades de las siguientes relaciones definidas en conjuntos infinitos:

- En Reales:  $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 4$
- En Reales:  $aRb \Leftrightarrow a(a-5) = b(b-5)$

- c) En  $\mathbb{Z}$  (enteros):  $a R b \Leftrightarrow a + b$  es impar
- d) En  $\mathbb{N}$  (naturales):  $x R y \Leftrightarrow \text{m.c.d.}(x,y) = 2$
- e) En  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ :  $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$
- f) En  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :  $(x,y) R (z,t) \Leftrightarrow x=z \wedge y \leq t$

12. Analice si las siguientes relaciones definidas en el conjunto de funciones continuas con dominio en  $\mathbb{R}$  son simétricas y si son antisimétricas:

- a)  $f R g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$
- b)  $f S g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}$

13. En  $\mathcal{P}(A)$  se define la relación:  $X R Y \Leftrightarrow |X \cap Y| = 1$

- a) Si  $A = \{1,2\}$  haga el digrafo de la relación  $R$  y analice sus propiedades
- b) Si  $A = \{a, b, c\}$  indique la cantidad de pares de la relación. Justifique

14. En  $\mathcal{P}(A)$  con  $A = \{a, b, c\}$ , se define la relación  $R: X R Y \Leftrightarrow X = \bar{Y}$

Analice si  $R$  es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. (Demuestre las que cumpla y justifique bien las que no cumple)

15. Escriba la matriz de una relación definida en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  que tenga 8 o más pares ordenados, sea antisimétrica, transitiva y no sea reflexiva.

16. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en el que se define la relación  $R: A \rightarrow A$  tal que  $x R y \Leftrightarrow x \oplus y = 4$  siendo la operación  $\oplus$  la que se da en la siguiente tabla:

$\oplus$	1	2	3	4	5
1	4	2	4	1	3
2	1	4	1	2	4
3	4	1	4	3	2
4	1	2	3	4	5
5	3	4	2	5	4

- a) Halle la relación  $R$  por extensión y el digrafo de  $R$
- b) Escriba la matriz de  $R$  y analice si es una relación transitiva

17. Indique el valor de verdad, justificando:

- a) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación antisimétrica entonces  $R^{-1}$  también es antisimétrica
- b) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación transitiva entonces  $R^{-1}$  también es transitiva
- c) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación a-reflexiva entonces  $\bar{R}$  es reflexiva
- d) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación a-simétrica entonces  $\bar{R}$  es a-simétrica
- e) Si  $R: A \rightarrow A$  y  $T: A \rightarrow A$  son transitivas entonces  $R \cup T$  es transitiva
- f) Si  $R: A \rightarrow A$  y  $T: A \rightarrow A$  son simétricas entonces  $R \cap T$  es simétrica



18. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,4), (4,2), (4,4)\}$
- Haga el digrafo de la relación R y halle la matriz de la relación
  - Halle  $R^2, R^3, R^4, R^\infty$  por extensión sabiendo que representan los cambios de longitud n en el digrafo. Verifique calculando sus matrices.

19. En el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$  se define la relación R a través de su matriz:

$$M_{(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcule  $M(R^2), M(R^3), M(R^4)$  y luego  $M(R^\infty) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) \vee M(R^4)$
- Haga el digrafo de R e interprete lo que significa la relación de conectividad  $R^\infty$

#### IV. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

20. Demuestre que cada una de las siguientes relaciones definidas en el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  es de equivalencia. Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
- $A R b \Leftrightarrow a + b$  es par
  - $A R b \Leftrightarrow 3 \mid (a - b)$
  - $A R b \Leftrightarrow$  los nombres de 'a' y 'b' tienen la misma cantidad de letras (por ejemplo  $3 R 6$  ya que "tres" y "seis" tienen 4 letras cada uno)

21. Sea el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Haga el digrafo y escriba la matriz de una relación R sabiendo que es de equivalencia, hay 3 clases de equivalencia,  $5 \in cl(6)$  y, en total, hay 14 pares ordenados de R

22. En  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  se define la relación R tal que:  $x R y \Leftrightarrow x + y = 6$ .
- Halle la matriz de la relación  $R^2$  (R compuesta con R) y luego la matriz  $S = R \cup R^2$
  - Analice si S es de equivalencia, en caso afirmativo, halle las clases y el conjunto cociente. Si no lo es, justifique qué propiedad no cumple.

23. Dada la siguiente matriz de una relación definida en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique el valor de k (0 o 1) para que R sea de equivalencia. Justifique
- Escriba la partición que produce en el conjunto



24. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , en  $P(A)$  se define la siguiente relación:  $X R Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$ , con  $B = \{2, 4\}$
- Pruebe que  $R$  es de equivalencia
  - Halle las clases de equivalencia
  - Halle el conjunto cociente
25. En el conjunto de los Reales se define:  $x S y \Leftrightarrow |x - 1| = |y - 1|$ . Demuestre que  $S$  es de equivalencia, grafique la relación, halle clases y conjunto cociente.
26. En  $Z$  se define la relación  $R: x R y \Leftrightarrow 5 \mid (x - y)$
- Demuestre que  $R$  es de equivalencia
  - Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
27. En el conjunto de los Reales, se define:  $x R y \Leftrightarrow x - y \in Z$
- Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia
  - Halle las clases de equivalencia y conjunto cociente.
28. En el conjunto de los Reales se define la relación  $R: x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ , siendo  $f: R \rightarrow R$  (función asociada a la relación  $R$ ).
- Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia, cualquiera sea la función  $f$ .
  - Considere que  $f(x) = |x^2 - 2|$ , grafique la función  $f$  y la relación  $R$ . Luego halle las clases de equivalencia y conjunto cociente.
  - Demuestre que el conjunto de índices es un subconjunto en el cual la  $f$  es biyectiva
29. En  $R^+$  se define al relación  $R: x R y \Leftrightarrow |\log(x)| = |\log(y)|$
- Demuestre que  $R$  es de equivalencia
  - Indique cuál de los siguientes puede considerarse conjunto cociente (Justifique)  
 $A = \{cl(x) / x \in [1, 2)\}$ ;  $B = \{cl(x) / x \in (0, 1]\}$ ;  $C = \{cl(x) / x \in (1, +\infty)\}$ ;  $D = \{cl(x) / x \in [10, +\infty)\}$
30. Sean los conjuntos  $A$  y  $B$  donde están definidas dos relaciones de equivalencia  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Demuestre que en el conjunto  $A \times B$ , la relación  $R$  definida:
- $$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x R_1 z \wedge y R_2 t$$
- es una relación de equivalencia también
31. Dada la siguiente relación de equivalencia definida en  $R^2$  tal que:  $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow (a-b)^2 = (c-d)^2$
- Halle  $cl((2, 1))$ ,  $cl((3, 3))$  e interprete geoméricamente
  - Escriba el conjunto cociente
32. En  $Z \times Z$  se define la relación de equivalencia:  $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow 3 \mid (x-z) \wedge y^2 = t^2$
- Halle las clases de equivalencia de  $(7, 4)$ ,  $(0, 0)$  y del  $(3, 8)$
  - Defina, correctamente, el conjunto cociente

33. En  $Z - \{0\} \times Z - \{0\}$  se define:  $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ . Demuestre que es una relación de equivalencia, halle  $cl((1,2))$ ,  $cl((-1,1))$ , generalice las clases y dé la participación que determina.
34. Indique Verdadero o Falso, demostrando o justificando
- Si  $S$  es una relación de equivalencia definida en un conjunto  $A$ , entonces  $S^{-1}$  también es de equivalencia
  - Las clases de equivalencia determinadas por una relación  $R$  en un conjunto  $A$  son disjuntas dos a dos.
  - Si  $R: A \rightarrow A$  y  $S: A \rightarrow A$  son de equivalencia entonces  $R \cap S$  es de equivalencia
  - Si  $R: A \rightarrow A$  y  $S: A \rightarrow A$  son de equivalencia entonces  $R \cup S$  es de equivalencia
35. Si se considera la relación de equivalencia definida en el conjunto  $P$  de parábolas del plano con eje vertical:  $p_1 S p_2 \Leftrightarrow$  tienen el mismo vértice
- Señale dos elementos de la clase de equivalencia de la parábola:  $p: y=2(x+3)^2 - 1$
  - Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente correspondiente a la relación  $S$
36. Se el conjunto  $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Indique cuáles de los siguientes conjuntos son particiones de  $A$ , justificando. Para los que sean, haga el digrafo de la relación de equivalencia asociado
- $P = \{ \{3,4,5\}, \{1,7\}, \{2\} \}$
  - $P = \{ \{2,4,5\}, \{1\}, \{3,7\}, \{6\} \}$
  - $P = \{ \{4,6\}, \{1,2,3,7\}, \{2,5\} \}$
  - $P = \{ \{x \in A / x > 3\}, \{x \in A / x \leq 3\} \}$
  - $P = \{ \{x \in A / x \leq 4\}, \{x \in A / x > 4 \wedge x < 5\}, \{x \in A / x \geq 5\} \}$

⊕ Relaciones

① Sean  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6, 8\}$

a) Indique la cantidad de pares del producto cartesiano y la cantidad de relaciones diferentes que se pueden definir de  $A$  en  $B$ .

$$|A \times B| = |A| \times |B| = 3 \cdot 4 = \boxed{12 = |A \times B|}$$

$$|\text{Relaciones}| = 2^{|A \times B|} = \boxed{2^{12} = \text{cant. Rel. posibles}}$$

b) Exprese cada una de las sig. relaciones de  $A$  en  $B$  por extensión indique dominio, imagen, relación inversa y relación complementaria:

•  $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid 2x \leq y\}$

$$R_1 = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (3, 8)\}$$

$$\text{dom}(R_1) = \{1, 2, 3\} \quad \text{Im}(R_1) = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$R_1^{-1} = \{(2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 3)\}$$

$$R_1^c = \{(2, 2), (3, 2), (3, 4)\}$$

•  $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \text{ es par}\}$

$$R_2 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8)\} ; \quad \text{dom}(R_2) = \{2\} \quad \text{Im}(R_2) = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$R_2^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2)\}$$

$$R_2^c = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

•  $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\} = \{(2, 4)\}$

$$\text{dom}(R_3) = \{2\} \quad \text{Im}(R_3) = \{4\} \quad R_3^{-1} = \{(4, 2)\}$$

$$R_3^c = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

•  $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geq 7\}$

$$R_4 = \{(1, 8), (2, 8), (3, 8)\}$$

$$\text{dom}(R_4) = \{1, 2, 3\} \quad \text{Im}(R_4) = \{8\} \quad R_4^c = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$$

$$R_4^{-1} = \{(8, 1), (8, 2), (8, 3)\}$$

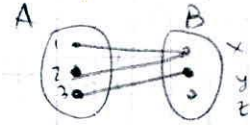
② Dados los sig. conjuntos =

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{x, y, z\} \quad C = \{m, n\} \quad D = \{a, b, c, d\}$$

a) Indique si las sig. relaciones son funciones. En caso afirmativo, clasifíquelas como inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

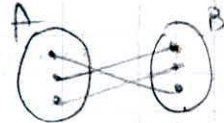
•  $R_1: A \rightarrow B / R_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y)\}$

Es función. No sobreyectiva. No inyectiva



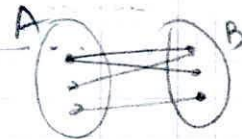
•  $R_2: A \rightarrow B / R_2 = \{(1, z), (2, x), (3, y)\}$

Es función. Es biyectiva



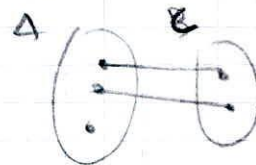
•  $R_3: A \rightarrow B / R_3 = \{(1, x), (1, y), (2, x), (3, z)\}$

No es función



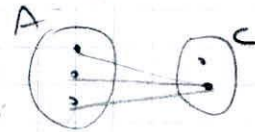
•  $R_4: A \rightarrow C / R_4 = \{(1, m), (2, n)\}$

No es función.



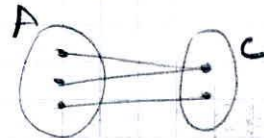
•  $R_5: A \rightarrow C / R_5 = \{(1, m), (2, m), (3, m)\}$

Es función. No sobreyectiva. No inyectiva



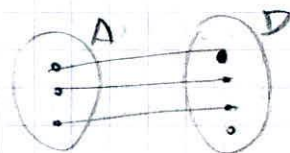
•  $R_6: A \rightarrow C / R_6 = \{(1, m), (2, m), (3, m)\}$

Es función. Es sobreyectiva



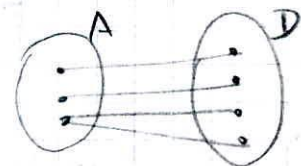
•  $R_7: A \rightarrow D / R_7 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

Es función. Es inyectiva



•  $R_8: A \rightarrow D / R_8 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (3, d)\}$

No es función



b) Complete: Para que exista una función biyectiva entre dos conjuntos finitos, sus cardinales deben ser: iguales

U.4.

3) Siendo  $R: A \rightarrow B$  y  $S: A \rightarrow B$ , indique el valor de verdad, demuestre o justifique, según corresponda:

a)  $|R| = |R^{-1}|$  V

$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$   $\rightarrow$  tienen la misma cant. de elementos pues  $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R^{-1}$

b)  $|R| = |\bar{R}|$  F

contra ej:  $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ ,  $R = \{(1,1)\} \Rightarrow \bar{R} = \{(1,2), (1,3)\}$  y  $|R| \neq |\bar{R}|$

c)  $|R| \leq |R \cup S|$  V

$\forall (x, y) \in R \xrightarrow{\text{def. Relac.}} x \in A \wedge y \in B \xrightarrow{\text{def. Rel}} (x, y) \in R \vee (x, y) \in S \xrightarrow{\text{def. U}} (x, y) \in R \cup S$   
 $\therefore R \subseteq R \cup S$

d)  $|R| > 0$  F

$R = \emptyset \rightarrow |R| = 0$

e)  $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$  V

$x \text{ def. } R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$   
 $\downarrow$   $y \in \text{dom}(R^{-1})$  /  $y \in \text{Im}(R)$

f)  $\text{Dom}(\bar{R}) = A - \text{Dom}(R)$  F

contraej:  $A = \{1, 2\}$   $B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1, a), (2, b)\} \rightarrow \bar{R} = \{(1, b), (1, c), (2, a), (2, c)\}$

$\text{dom}(R) = \{1, 2\}$   $\text{dom}(\bar{R}) = \{1, 2\} \neq A - \text{dom}(R) = \{1, 2\} - \{1, 2\} = \emptyset$

g)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$  V

$\forall (y, x) \in (R \cap S)^{-1} \xrightarrow{\text{def. inverse}} (x, y) \in (R \cap S) \xrightarrow{\text{def. \cap}} (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \iff$   
 $\xrightarrow{\text{def. Inversa}} (y, x) \in R^{-1} \wedge (y, x) \in S^{-1} \xrightarrow{\text{def. \cap}} (y, x) \in (R^{-1} \cap S^{-1})$

h)  $R \subseteq S \Rightarrow \bar{S} \subseteq \bar{R}$

$x \text{ hip } \forall (x, y) : (x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in S \xrightarrow{\text{contra recíproco}} (x, y) \notin S \Rightarrow (x, y) \notin R$   
 $\xrightarrow{\text{complemento}} (x, y) \in \bar{S} \Rightarrow (x, y) \in \bar{R} \xrightarrow{\text{def. } \subseteq} (x, y) \in (\bar{S} \subseteq \bar{R})$

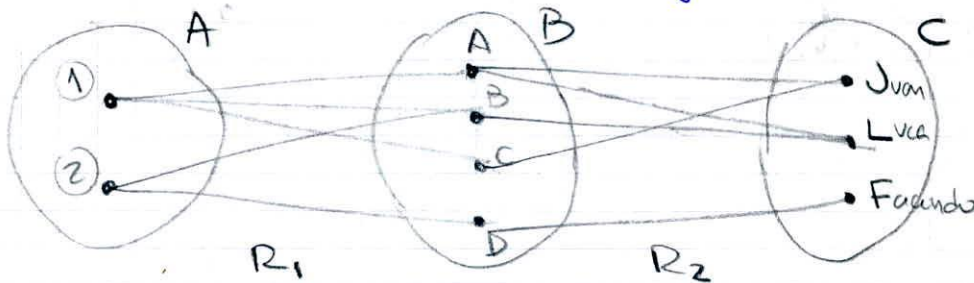
4) Un grupo de enfermeras: {Alicia, Beatriz, Candela, Dora} visitaron una aldea en la que había dos enfermos que pueden padecer un virus muy raro. En la sig. tabla se muestra quién tuvo contacto directo con cada uno de los enfermos.

A \ B	Alicia	Beatriz	Candela	Dora
Enfermo 1	si	si	si	no
Enfermo 2	no	si	no	si

Luego las cuatro enfermeras se cruzaron en el camino con tres niños: Juan, Luca y Facundo y los saludaron con abrazos. Se muestran los abrazos que hubo:

C \ B	Alicia	Beatriz	Candela	Dora
Juan	si	no	si	no
Luca	si	si	no	no
Facundo	no	no	no	si

a) Represente, mediante Diagramas de Venn, los tres conjuntos e indique, con aristas, los contactos que hubo tanto entre los enfermos y enfermeras ( $R_1$ ) como entre enfermeras y niños ( $R_2$ ).



b) Halle la relación compuesta  $R_2 \circ R_1$  para saber qué niño puede contagiarse el virus de cada enfermo.

$$R_2 \circ R_1 = \{(E_1, Juan), (E_1, Luca), (E_2, Luca), (E_2, Facundo)\}$$

c) Si se supiera con certeza que uno solo de los enfermos tiene el virus extraño, ¿cuál niño podemos asegurar que lo tiene?

Lamentablemente, podemos asegurar que Luca lo tiene, pues por esa composición vista en b), tuvo contacto directo con ambos enfermos.

U.4

## Matrices Booleanas

⑤ Dadas las matrices booleanas  $A$  y  $B$ , hallar  $C = A \vee B$ ,  $D = A \wedge B$ ,  $F = A^t$ ,  $G = \overline{B}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet C = A \vee B$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\bullet D = A \wedge B$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\bullet F = A^t$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\bullet G = \overline{B}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

⑥ Dadas las sig. matrices booleanas, halle el producto matricial  $M \cdot P$  ¿es posible  $P \cdot M$ ? Justifique.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

				P		
				1 0		
				0 1		
				0 0		
				1 0		
M	1	0	0	1	1	0
	0	0	1	1	1	0
	1	1	0	0	1	1

$$\rightarrow M \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$M \cdot P$  es posible pues  $|\text{col}(M)| = |\text{filas}(P)|$

$P \cdot M$  no es posible pues  $|\text{col}(P)| \neq |\text{filas}(M)|$

⊕ Sean  $A, B, C \in \{0,1\}^{m \times n}$ . Indique V o F, justifiando.

a)  $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

V (asociatividad)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B \vee C = \begin{bmatrix} (b_{11} \vee c_{11}) & (b_{12} \vee c_{12}) & \dots & (b_{1n} \vee c_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{m1} \vee c_{m1}) & (b_{m2} \vee c_{m2}) & \dots & (b_{mn} \vee c_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} (a_{11} \vee b_{11}) & (a_{12} \vee b_{12}) & \dots & (a_{1n} \vee b_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} \vee b_{m1}) & (a_{m2} \vee b_{m2}) & \dots & (a_{mn} \vee b_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A \vee (B \vee C)} = \begin{bmatrix} (a_{11} \vee (b_{11} \vee c_{11})) & (a_{12} \vee (b_{12} \vee c_{12})) & \dots & (a_{1n} \vee (b_{1n} \vee c_{1n})) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} \vee (b_{m1} \vee c_{m1})) & (a_{m2} \vee (b_{m2} \vee c_{m2})) & \dots & (a_{mn} \vee (b_{mn} \vee c_{mn})) \end{bmatrix} =$$

asociatividad

$$\textcircled{I} = \begin{bmatrix} a_{11} \vee b_{11} \vee c_{11} & a_{12} \vee b_{12} \vee c_{12} & \dots & a_{1n} \vee b_{1n} \vee c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \vee b_{m1} \vee c_{m1} & a_{m2} \vee b_{m2} \vee c_{m2} & \dots & a_{mn} \vee b_{mn} \vee c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(A \vee B) \vee C = \begin{bmatrix} ((a_{11} \vee b_{11}) \vee c_{11}) & ((a_{12} \vee b_{12}) \vee c_{12}) & \dots & ((a_{1n} \vee b_{1n}) \vee c_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((a_{m1} \vee b_{m1}) \vee c_{m1}) & ((a_{m2} \vee b_{m2}) \vee c_{m2}) & \dots & ((a_{mn} \vee b_{mn}) \vee c_{mn}) \end{bmatrix} =$$

asociatividad

$$\textcircled{II} = \begin{bmatrix} a_{11} \vee b_{11} \vee c_{11} & a_{12} \vee b_{12} \vee c_{12} & \dots & a_{1n} \vee b_{1n} \vee c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \vee b_{m1} \vee c_{m1} & a_{m2} \vee b_{m2} \vee c_{m2} & \dots & a_{mn} \vee b_{mn} \vee c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{I} = \textcircled{II} \therefore A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$b) (A \wedge B)^t = A^t \wedge B^t \quad \boxed{V}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow A \wedge B = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & \dots & a_{1m} \wedge b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \wedge b_{m1} & \dots & a_{mn} \wedge b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (A \wedge B)^t = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & \dots & a_{m1} \wedge b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} \wedge b_{1n} & \dots & a_{mn} \wedge b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^t \wedge B^t = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & \dots & a_{m1} \wedge b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} \wedge b_{1n} & \dots & a_{mn} \wedge b_{mn} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$c) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad \boxed{V}$$

por prop. asociativa (es muy largo... te lo dejo a vos)

$$d) \overline{A \vee B} = \bar{A} \vee \bar{B} \quad \boxed{F}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A \vee B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \bar{A} \vee \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \neq$$

$$e) A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \boxed{V}$$

Por propiedad distributiva (se demuestra en forma similar a la eq. a) + b))

$$f) A \wedge (B \cdot C) = (A \wedge B) \cdot (A \wedge C) \quad \boxed{F}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A \wedge (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A \wedge C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} (A \wedge B) \cdot (A \wedge C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \neq$$

### III Relaciones Binarias - Propiedades.

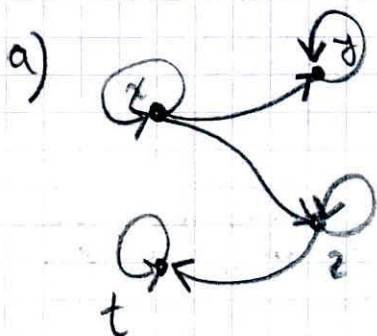
8 Sean las siguientes relaciones  $R, S, T$  en los conj. indicados:

a) Haga el digrafo de cada relación

b) Hable la matriz de cada relación

c) analice si c/u cumple con los prop: reflexiva, a-reflexiva, simétrica, a-simétrica, antisimétrica y transitiva.

en  $A = \{x, y, z, t\}$ ,  $R = \{(x,x), (x,y), (x,z), (y,y), (z,t), (z,z), (t,t)\}$



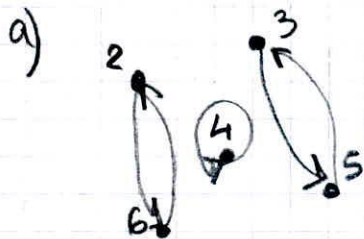
b)

	x	y	z	t
x	1	1	1	0
y	0	1	0	0
z	0	0	1	1
t	0	0	0	1

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)  $R$  cumple solo: antisimétrica y reflexiva.

en  $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  se define la relación  $S$  tal que:  $a S b \Leftrightarrow a + b = 8$

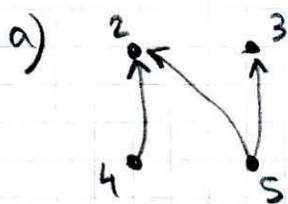


b)

	2	3	4	5	6
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0

c) cumple:  
simétrica

en  $C = \{2, 3, 4, 5\}$  se define la relación  $T$  tal que  $a T b \Leftrightarrow a \geq b + 2$



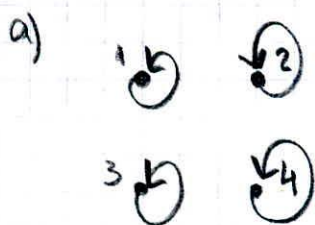
b)

	2	3	4	5
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0
5	1	1	0	0

c) cumple:  
 • a-reflexiva (ningún bucle)  
 • a-simétrica  
 • antisimétrica  
 • transitiva.

transitiva: dice si  $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$ .  
 Si  $a R b \wedge b R c \Rightarrow ? \checkmark$  siempre

en  $D = \{1, 2, 3, 4\}$  se define la relación  $Y$  tal que:  $a Y b \Leftrightarrow a^2 = b^2$



b)

$M_Y =$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
---------	--

c) cumple:  
 • Reflexiva (todos los bucles)  
 • Simétrica:  $M_Y = M_Y^T$   
 • transitiva  
 • antisimétrica

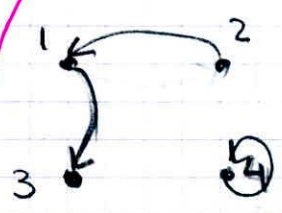
antisimétrica:  $\forall a, b \in R, a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

U.4

9) Sea el conj.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  Haga el digrafo de una relación  $R$  tal que:

a) Sea antisimétrica, no a-simétrica y no transitive

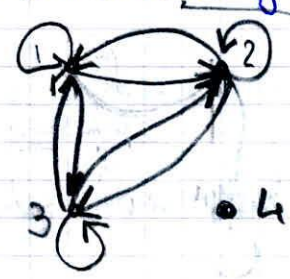
$$M(R_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$2R_1, 1R_3$  pero  $2R_3$   
 $M(R_1) \cdot M(R_1)^t = N$

b) Sea simétrica, no reflexiva y transitive

$$M(R_2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$1R_2, 2R_1$  y  $1R_1$  ✓  
 $2R_1, 1R_2$  y  $2R_2$  ✓  
 $2R_3, 3R_1$  y  $2R_1$  ✓  
 $3R_2, 1R_3, 3R_3$  ✓

$M(R_2) = M(R_2)^t$  ✓

c) tenga solo 3 pares ordenados, sea simétrica y antisimétrica

$$M(R_3) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$M(R_3) = M(R_3)^t$  ✓

10) Considere las relaciones  $R$  y  $S$  definidas en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  tales que:

$$xRy \Leftrightarrow x \geq 2y \quad \text{y} \quad xSy \Leftrightarrow (-1)^x = (-1)^y$$

es una forma de decir que ambas sean pares o ambas sean impares

a) Halle las matrices de las relaciones  $M(R)$  y  $M(S)$

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M(S) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

b) Halle operando matricialmente  $M(R \cap S)$ ,  $M(R \cup S)$ ,  $M(R^{-1})$ ,  $M(\bar{S})$  y  $M(S \circ R)$

$$M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(R \cup S) = M(R) \vee M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(R^{-1}) = M(R)^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(\bar{S}) = \overline{M(S)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(S \circ R) = M(R) \cdot M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Analice, a través de la matriz si  $R \cap S$  es asimétrica y si es transitiva

- $R \cap S$  es asimétrica pues los únicos están en  $(3,1)$  pero no en  $(1,3)$   
 $(4,2)$  pero no en  $(2,4)$   
 $(5,1)$  pero no en  $(1,5)$

$$[M(R \cap S)]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (M(R \cap S))^2 \leq M(R \cap S) \therefore \text{es transitiva}$$

U4

II) Analice las propiedades de los sig. relaciones definidos en conjuntos infinitos:

a) en  $\mathbb{R}$ :  $xRy \iff |x-y| \leq 4$

• Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{R}: |x-x| = 0 \leq 4 \xrightarrow{\text{def Rel.}} xRx$  **ES REFLEXIVA**

• A-reflexiva: Si ya es reflexiva  $\Rightarrow$  NO es a-reflexiva

• Simétrica: **ES SIMÉTRICA**

demo  $\forall x, y \in \mathbb{R}: xRy \xrightarrow{\text{def. rel.}} |x-y| \leq 4 \Rightarrow |y-x| \leq 4 \Rightarrow yRx$

asimétrica:  $2R4$  y  $4R2$ ,  $(ab) \in R$  y  $(ba) \in R$  no es asimétrica

antisimétrica:  $2R4$  y  $4R2$ , pero  $2 \neq 4$  no es antis.

transitiva:  $2R6$  y  $6R8$  pero  $2 \not R 8$  pues  $|2-8| = 6 > 4$

b) en  $\mathbb{R}$ :  $aRb \iff a(a-s) = b(b-s)$  cumplen:

• Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{R}: x(x-s) = x(x-s) \xrightarrow{x \text{ equiv.}} xRx$  ✓

• Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{R}: xRy \xrightarrow{\text{def rel}} x(x-s) = y(y-s) \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{equiv.}} y(y-s) = x(x-s) \xrightarrow{\text{def Rel}} yRx$  ✓

• transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: xRy \wedge yRz \xrightarrow{\text{def rel}}$   
 $\Rightarrow x(x-s) = y(y-s) \wedge y(y-s) = z(z-s) \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{por igualdad}} x(x-s) = z(z-s) \xrightarrow{\text{def rel}} xRz$  ✓

c) en  $\mathbb{Z}$ :  $aRb \iff a+b$  es impar

• No es reflexiva, pues par + par = par, impar + impar = par

• a-reflexiva:  $\forall x: x+x = 2x \Rightarrow$  par  $\therefore x \not R x$  **ES A-REFLEXIVA**

• Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{Z}: xRy \xrightarrow{\text{def rel}} x+y = 2k+1 \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{comut. +}} y+x = 2l+1 \xrightarrow{\text{def. rel.}} yRx \rightarrow$  **ES SIMÉTRICA**

• No es transitiva:  $4R3$  y  $3R8$  pero  $4 \not R 8$

d) en  $\mathbb{N}$ :  $x R y \Leftrightarrow \text{mcd}(x, y) = 2$

no es a-reflexiva

• Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{N}, \text{mcd}(x, x) = x \neq 2 \rightarrow$  no es reflexiva  
Salvo  $\text{mcd}(2, 2) \rightarrow 2 R 2$

• Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{N}, x R y \xrightarrow{\text{def. rel.}} \text{mcd}(x, y) = 2 \xrightarrow{\text{comut.}} \text{mcd}(y, x) = 2 \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{def. rel.}} y R x$  / ES SIMÉTRICA

• Transitividad:  $8 R 2 \wedge 2 R 16$ , pero  $8 \not R 16$  pues  $\text{mcd}(8, 16) = 8 \neq 2$

e) en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ :  $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

• Reflexiva:  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: x + y = x + y \xrightarrow{\text{comut. +}} x + y = y + x \Rightarrow (x, y) R (x, y)$   
ES REFLEXIVA

• Simétrica:  $\forall (x, y), (u, v) \Rightarrow (x, y) R (u, v) \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{def. rel.}} x + v = y + u \xrightarrow{\text{comut. +}} u + y = v + x \xrightarrow{\text{def. rel.}} (u, v) R (x, y)$   
ES SIMÉTRICA

• Transitiva:  $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}; (a, b) R (c, d) \wedge (c, d) R (e, f) \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{def. rel.}} a + d = b + c \wedge c + f = d + e \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{equivalencia}} a + d = b + c \wedge c = d + e - f \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{equivalencia}} a + d = b + d + e - f \xrightarrow{\text{equiva}} a + f = b + e \xrightarrow{\text{def. rel.}} (a, b) R (e, f)$   
ES TRANSITIVA

f) en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :  $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x = z \wedge y \leq t$

• Reflexiva:  $\forall (x, y) \in \mathbb{N}: x = x \wedge y \leq y \Rightarrow (x, y) R (x, y)$   
ES REFLEXIVA

• Simétrica:  $(x, y), (z, t) \wedge (x, y) R (z, t) \xrightarrow{\text{def. rel.}} x = z \wedge y \leq t \Rightarrow$   
 $z = x$  pero  $t \not\leq y \Rightarrow$  No es simétrica

Solo puede dar si  $t = y \therefore$   
es antisimétrica

• Transitiva:  $\forall (x, y), (z, t), (u, v) \in \mathbb{R}: (x, y) R (z, t) \wedge (z, t) R (u, v) \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{def. Rel.}} (x = z \wedge y \leq t) \wedge (z = u \wedge t \leq v) \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{equivalencia}} x = u \wedge y \leq t \leq v \Rightarrow x = u \wedge y \leq v \xrightarrow{\text{def. rel.}} (x, y) R (u, v)$

ES TRANSITIVA

J4

12) Analice si las sig. relaciones definidas en el conjunto de funciones continuas con dominio en  $\mathbb{R}$  son simétricas y si son antisimétricas:

a)  $f R g \iff f(0) = g(0)$

•  $\forall f, g: f R g \xrightarrow{\text{def. rel.}} f(0) = g(0) \xrightarrow{\text{equiv.}} g(0) = f(0) \xrightarrow{\text{def. rel.}} g R f$   
ES SIMÉTRICA

• Antisim =  $\forall f, g: f R g \wedge g R f \implies g = f$  pero en este caso puede no cumplirse

contra ej.:  $f(x) = x^2 + 2x + 2$   
 $g(x) = 2x - \frac{x+6}{3} \implies g(0) = 2$  pero  $f(x) \neq g(x)$

b)  $f S g \iff f(x) \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall f, g: f S g \xrightarrow{\text{def. rel.}} f(x) \leq g(x) \implies g(x) \leq f(x)$   
 solo si  $g(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

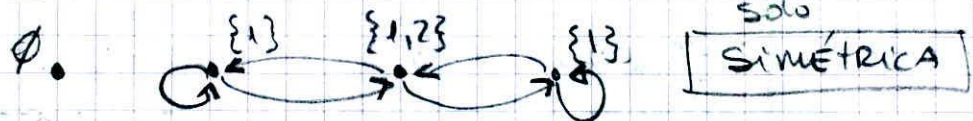
$f S g \wedge g S f \xrightarrow{\text{def. rel.}} f(x) \leq g(x) \wedge g(x) \leq f(x) \implies g(x) = f(x)$

ES ANTISIMÉTRICA

13) En  $\mathcal{P}(A)$  se define la relación  $X R Y \iff |X \cap Y| = 1$

a) Si  $A = \{1, 2\}$  haga el digrafo de la relación  $R$  y analice sus prop.

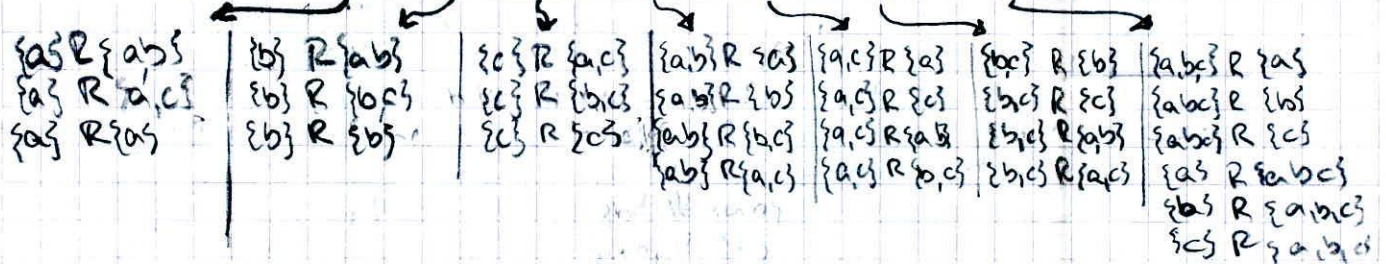
$A = \{1, 2\} \implies \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$



b) Si  $A = \{a, b, c\}$  indique la cantidad de pares de la relación

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 6 = 27$



$|\text{pares de } R| = 27$

14) En  $\mathcal{P}(A)$  con  $A = \{a, b, c\}$  se define la relación  $R: XRY \Leftrightarrow X = \bar{Y}$ . Analice si  $R$  es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. (demostrar los que cumplen y justificar los que no cumplen)

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$$

$$R = \{ (\{a\}, \{b,c\}), (\{b,c\}, \{a\}), (\emptyset, A), (A, \emptyset), (\{b\}, \{a,c\}), (\{a,c\}, \{b\}), (\{c\}, \{a,b\}), (\{a,b\}, \{c\}) \}$$

• Ningún elemento se relaciona con sí mismo  $\begin{cases} \swarrow \text{No es Reflexiva} \\ \searrow \text{es a-reflexiva} \end{cases}$

•  $X = \bar{Y} \Rightarrow \bar{X} = Y \Rightarrow XRY \Rightarrow YRX$  es SIMÉTRICA

$$M_{(R)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

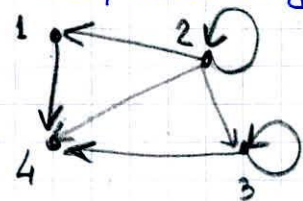
simétrica (no es antisimétrica pues hay 1 en simetría)

no es transitiva pues

•  $\{a\} R \{b,c\} \wedge \{b,c\} R \{a\}$  pero  $\{a\} \not R \{a\}$

15) Escriba la matriz de una relación definida en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  que tenga 8 o más pares ordenados, sea antisimétrica, transitiva y no sea reflexiva

$$M_{(R)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

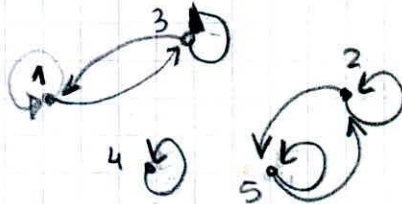


16) Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en el que se define la relación  $R: A \rightarrow A$  tal que  $xRy \Leftrightarrow x \oplus y = 4$  siendo la operación  $\oplus$  la que se da en la sig. tabla:

$\oplus$	1	2	3	4	5
1	4	2	4	1	3
2	1	4	1	2	4
3	4	1	4	3	2
4	1	2	3	4	5
5	3	4	2	5	4

a) Halle la relación  $R$  por extensión y el digrafo de  $R$

$$R = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (2,5), (3,1), (3,3), (4,4), (5,2), (5,5) \}$$



b) Escriba la matriz de  $R$  y analice si es una relación transitiva

$$M_{(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{(R)}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es transitiva, pues  $M_{(R)}^2 \leq M_{(R)}$

U.4

(F) Indique el valor de verdad, justificando.

a) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación antisimétrica, entonces  $R^{-1}$  también es antisimétrica.

(V)  $R$  antisimétrica:  $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$  ] Hipótesis

quiero llegar a ver que:  $bR^{-1}a \wedge aR^{-1}b \Rightarrow b=a$

dem:  $\forall a, b \in A: bR^{-1}a \wedge aR^{-1}b \xrightarrow{\text{def. inversa}} aRb \wedge bRa \Rightarrow$   
 $\text{mp} \Rightarrow R \text{ antis.} \xrightarrow{\text{simetría de la igualdad}} a=b \checkmark$

b) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación transitiva entonces  $R^{-1}$  también es transitiva.

(V)  $R$  es transitiva:  $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$  ] Hipótesis

quiero ver que:  $cR^{-1}b \wedge bR^{-1}a \Rightarrow cR^{-1}a$

dem:  $\forall a, b, c \in A: cR^{-1}b \wedge bR^{-1}a \xrightarrow{\text{def. inversa}} bRc \wedge aRb$   
 $\xrightarrow{\text{commut.}} aRb \wedge bRc \xrightarrow{\text{hipót.}} aRc \xrightarrow{\text{def. inversa}} cR^{-1}a \checkmark$

c) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación a-reflexiva, entonces  $\bar{R}$  es Reflexiva

(V)  $R$  es a-reflexiva:  $\forall a \in A: a \notin R a$  hipótesis

quiero ver que:  $\forall a \in A: a \in \bar{R} a$

dem:  $\forall a \in A: (a, a) \notin R \xrightarrow{\text{def. complemento}} (a, a) \in \bar{R} \Rightarrow a \in \bar{R} a \checkmark$

d) Si  $R: A \rightarrow A$  es una relación asimétrica entonces  $\bar{R}$  es simétrica

(F) Contraejemplo:  $M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es a-simétrica

$M(\bar{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$   
No es simétrica

e) Si  $R: A \rightarrow A$  y  $T: A \rightarrow A$  son transitivas entonces  $R \cup T$  es transitiva

(F) Contraejemplo:  $R: \begin{matrix} 1 & & 2 \\ & \curvearrowright & \\ & & 3 \end{matrix}$   $T: \begin{matrix} 1 & & 2 \\ & \curvearrowright & \\ & & 3 \end{matrix}$

$R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$  es transitiva

$T = \{(2,1), (2,3), (3,1)\}$

$R \cup T$

$\exists R1 \wedge \exists R2$  pero  $\exists \cancel{R}2$   
No es transitiva

f) Si  $R: A \rightarrow A$  y  $T: A \rightarrow A$  son simétricas  $\Rightarrow R \cap T$  es simétrica

(V)  $R$  simétrica:  $aRb \Rightarrow bRa$  hip 1

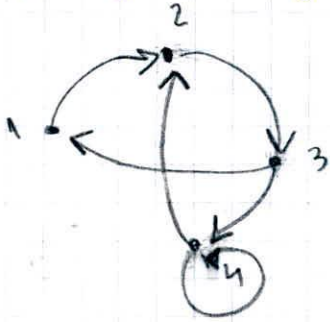
$T$  simétrica:  $aTb \Rightarrow bTa$  hip 2

quiero ver que:  $\frac{a(R \cap T)b}{(a,b) \in (R \cap T)} \Rightarrow b(R \cap T)a$

dem:  $\forall a, b \in A: a(R \cap T)b \Rightarrow (a,b) \in R \cap T \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in T \xrightarrow{\text{hip 1}}$   
 $\Rightarrow (b,a) \in R \wedge (a,b) \in T \xrightarrow{\text{hip 2}}$   
 $\Rightarrow (b,a) \in R \wedge (b,a) \in T \xrightarrow{\text{def } \cap}$   
 $\Rightarrow (b,a) \in (R \cap T) \Rightarrow b(R \cap T)a \checkmark$

(18) Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,4), (4,2), (4,4)\}$

a) Haga el digrafo de la relación  $R$  y halle la matriz de relación



$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Halle  $R^2, R^3, R^4$  y  $R^\infty$  por extensión sabiendo que representan los caminos de longitud  $n$  en el digrafo. Verifique calculando sus matrices.

•  $R^2 \rightarrow$  caminos de long 2

$$R^2 = \{(1,3), (2,1), (2,4), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

$$M(R^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

•  $R^3 =$  caminos de long 3

$$R^3 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

$$M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

•  $R^4 =$  caminos de long 4

$$R^4 = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

$$M(R^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

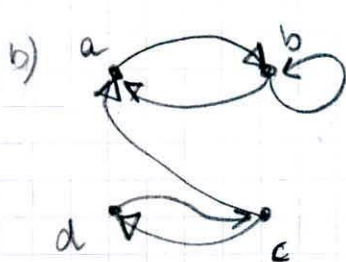
•  $R^\infty$ : ya con  $R^3$  la matriz  $M(R^3)$  está llena de 1  $\rightarrow$  todos los elementos se relacionan con todos

(19) En el conj.  $A = \{a, b, c, d\}$  se define la relación  $R$  a través de su matriz:

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

a) Calcule  $M(R^2), M(R^3), M(R^4)$  y luego  $M(R^\infty) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) \vee M(R^4)$

b) Haga el digrafo de  $R$  e interprete lo que significa la relación de conectividad  $R^\infty$



$$M(R^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; M(R^4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a y b se conectan entre sí y c y d se conectan con todos los elementos de A

$$M(R^\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

U,4 MP

IV Relaciones de equivalencia

20) Demuestre que cada una de las sig. relaciones definidas en el conj.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  es de equivalencia. Halle las clases de equivalencia y el conj. cociente.

a)  $aRb \Leftrightarrow a+b$  es par

•  $\forall x \in A : x+x \stackrel{\text{par}}{\Rightarrow} 2k + 2k = 4k = 2k_2 \Rightarrow \text{par} \checkmark$   
 Refl?   
 $x \text{ impar} (2k+1) + (2k+1) = 4k+2 = 2(2k+1) = 2k_3 \text{ par} \checkmark$   
 $\therefore xRx$   
 es Reflexiva  $\checkmark$

• ¿es Simétrica?  $\Rightarrow$  ¿se cumple que  $xRy \Rightarrow yRx$ ?  
 $\forall x, y \in A : xRy \stackrel{\text{def. rel}}{\Rightarrow} x+y = y+x \stackrel{\text{commut. + def. rel}}{\Rightarrow} yRx \rightarrow$  es simétrica

• ¿es transitiva?  $\Rightarrow$  ¿se cumple que  $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ ?  
 $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} x+y = 2k_1 \wedge y+z = 2k_2 \rightarrow$   
 $\Rightarrow x + \overbrace{y+z}^{2j} = 2k_1 + 2k_2 \Rightarrow x+z = 2(k_1+k_2) - 2y \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x+z = 2(\underbrace{k_1+k_2-y}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow x+z = 2k_3 \therefore xRz$  es transitiva

$cl(1) = \{x \in A \mid x+1 = 2k\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$   
 $cl(2) = \{x \in A \mid x+2 = 2k\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$   
 $\frac{A}{R} = \{cl(1), cl(2)\} = \{\bar{1}, \bar{2}\}$   
 $\frac{A}{R} = \{\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{2, 4, 6, 8, 10\}\}$

$$b) aRb \Leftrightarrow \exists! a-b \rightarrow a-b=3k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Reflexiva:

$$\forall x \in A: x-x=0=3 \cdot 0 \Rightarrow \exists! x-x \Rightarrow \boxed{xRx}$$

Simétrica

$$\forall x, y \in A: \boxed{xRy} \stackrel{\text{def. rel}}{\Rightarrow} \exists! k_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y=3k_1 \Rightarrow -(x-y)=-3k_1 \\ \Rightarrow y-x=3(-k_1) \stackrel{k_2}{\Rightarrow} y-x=3k_2 \Rightarrow \exists! y-x \Rightarrow \boxed{yRx}$$

Transitiva

$$\forall x, y, z \in A: \boxed{xRy} \wedge \boxed{yRz} \Rightarrow \exists! k_2 \wedge \exists! k_3 \Rightarrow x-y=3k_2 \wedge y-z=3k_3 \\ \Rightarrow x-y+y-z=3k_2+3k_3=3(k_2+k_3) \stackrel{k_4}{\Rightarrow} x-z=3k_4 \Rightarrow \boxed{xRz}$$

$$cl(3) = \{x \in A / xR0\} = \{x-0=3k, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow cl(3) = \{x \in A / x=3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$cl(1) = \{x \in A / xR1\} = \{x-1=3k, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow cl(1) = \{x \in A / x=3k+1\}$$

$$cl(2) = \{x \in A / xR2\} = \{x-2=3k, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow cl(2) = \{x \in A / x=3k+2\}$$

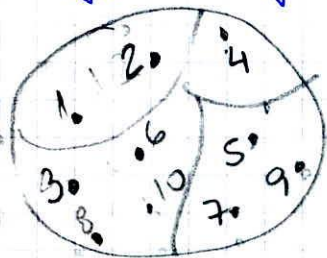
$$cl(3) = \{3, 6, 9\}$$

$$cl(1) = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$cl(2) = \{2, 5, 8\}$$

$$\boxed{\frac{A}{R} = \{cl(3), cl(1), cl(2)\} = \{\{3, 6, 9\}, \{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}\}}$$

5)  $aRb \Leftrightarrow$  los nombres de 'a' y 'b' tienen la misma cantidad de letras  
(por ej. 3R6 ya que "tres" y "seis" tienen 4 letras cada)



$$cl(1) = \{1, 2\}$$

$$cl(3) = \{3, 6, 8, 10\}$$

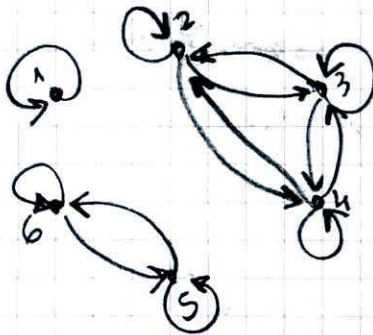
$$cl(4) = \{4\}$$

$$cl(5) = \{5, 7, 9\}$$

$$\frac{A}{R} = \{\{1, 2\}, \{3, 6, 8, 10\}, \{4\}, \{5, 7, 9\}\}$$

U4

21) Sea el conjunto:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   
 Haga el digrafo y escriba la matriz de una relación  $R$  sabiendo que es de equivalencia, hay 3 clases de equivalencia,  $5 \in cl(6)$  y, en total, hay 14 pares ordenados en  $R$



R	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0	0
4	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	1	1

=  $M(R)$

22) En  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , se define una relación  $R$  tal que:  $xRy \Leftrightarrow x+y=6$

a) Halle la matriz  $R^2$  ( $R$  compuesta con  $R$ ) y luego la de  $S = R \cup R^2$

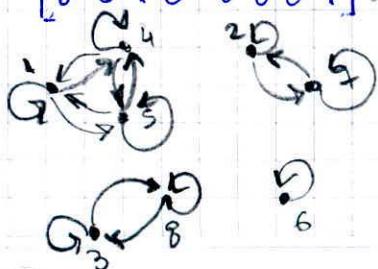
$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M(R^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M(S) = M(R) \cup M(R^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Analice si  $S$  es de equivalencia, en caso afirmativo halle las clases de equivalencia y el conj. cociente. Si no lo es, justifique qué propiedad no cumple

Es de equivalencia:  $cl(1) = \{1, 5\}$   
 $cl(2) = \{2, 4\}$   
 $cl(3) = \{3\}$

$$\frac{A}{R} = \{ \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\} \}$$

23) Dada la sig. matriz de una relación definida en  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


a) Indique el valor de  $k$  para que  $R$  sea de equivalencia

$k=0$  porque al hacer el digrafo veo que se relaciona  $4$  y  $5$   $\therefore$   $5$  solo se puede relacionar con  $4$  y  $5$

b) Escribe la partición que produce en el conjunto

$cl(1) = \{1, 4, 5\}$  ,  $cl(2) = \{2, 7\}$   
 $cl(3) = \{3, 8\}$  ,  $cl(6) = \{6\}$

24) Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , en  $\mathcal{P}(A)$  se define la sig. relación:

$$XRY \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B \text{ con } B = \{2, 4\}$$

a) Pruebe que  $R$  es de equivalencia

• Reflexiva:  $\forall X \in \mathcal{P}(A): X \cap B = X \cap B \Rightarrow XRX \checkmark$

• Simétrica:  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A): XRY \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow Y \cap B = X \cap B \Rightarrow YRX \checkmark$

• Transitiva:  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(A): XRY \wedge YRZ \Rightarrow$

$$\Rightarrow X \cap B = Y \cap B \wedge Y \cap B = Z \cap B \Rightarrow X \cap B = Z \cap B \Rightarrow X R Z$$

b) Halle las clases de equivalencia

$$cl(\emptyset) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

$$cl(\{2\}) = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$cl(\{4\}) = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$$

$$cl(\{2, 4\}) = \{\{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

c) Halle el conj. cociente

$$\frac{A}{R} = \{cl(\emptyset), cl(\{2\}), cl(\{4\}), cl(\{2, 4\})\}$$

25) En el conj. de los Reales se define:  $xSy \Leftrightarrow |x-1| = |y-1|$   
 Demuestre que  $S$  es de equivalencia, grafique la relación, halle clases y conj. cociente

• Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{R}: |x-1| = |x-1| \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} xSx \checkmark$

• Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{R}: xSy \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} |x-1| = |y-1| \stackrel{\text{equivalencia}}{\Rightarrow} |y-1| = |x-1| \Rightarrow ySx \checkmark$

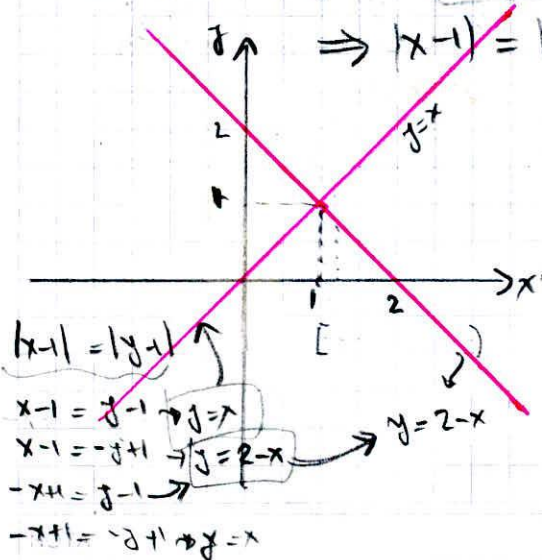
• Transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: xSy \wedge ySz \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} |x-1| = |y-1| \wedge |y-1| = |z-1| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x-1| = |z-1| \Rightarrow xSz$$

$$cl(1) = \{1\}$$

$$cl(x) = \{x, 2-x\}$$

$$\frac{\mathbb{R}}{S} = \{cl(x) \mid x \in [1, \infty)\}$$



Md U4

26) En  $\mathbb{Z}$  se define la relación  $R: xRy \Leftrightarrow 5|(x-y)$   $x-y=5k$   
 $k \in \mathbb{Z}$

a) Demuestre que  $R$  es de equivalencia

- Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{Z}: x-x=0=5 \cdot 0 \Rightarrow xRx$
- Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{Z}: xRy \xrightarrow{\text{def. rel.}} x-y=5k \Rightarrow -(x-y)=-5k \Rightarrow y-x=5(-k) \xrightarrow{k_2} y-x=5k_2 \xrightarrow{\text{def. rel.}} yRx$
- Transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: xRy \wedge yRz \xrightarrow{\text{def. rel.}} x-y=5k_1 \wedge y-z=5k_2 \Rightarrow x-z=5(k_1+k_2) \xrightarrow{\text{sumo m.o.m.}} xRz$

b) Halle las clases de equivalencia y el conj. cociente

$$cl(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid xR0 \Rightarrow 5|x \Rightarrow x=5k\} \Rightarrow cl(0) = \{x=5k\} = \bar{0}$$

$$cl(1) = \{x=5k+1\} = \bar{1}; \quad cl(2) = \{x=5k+2\} = \bar{2};$$

$$cl(3) = \{x=5k+3\} = \bar{3}; \quad cl(4) = \{x=5k+4\} = \bar{4}$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

27) En  $\mathbb{R}$  se define:  $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$

Ver: [youtube.com/watch?v=mrfxcKRHds](https://www.youtube.com/watch?v=mrfxcKRHds)

a) Demuestre que es una relación de equivalencia

- Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{R}: x-x=0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow xRx$
- Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{R}: xRy \xrightarrow{\text{def. rel.}} x-y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{def. rel.}} yRx$
- Transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: xRy \wedge yRz \xrightarrow{\text{def. rel.}} (x-y) \in \mathbb{Z} \wedge (y-z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{def. rel.}} xRz$

b) Halle las clases de equivalencia y conj. cociente

$$cl(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid yRx\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x-y \in \mathbb{Z}\}$$

mancha:  $mant(x) = x - ent(x)$

$$cl(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid mant(y) = x\}$$

$$\frac{\mathbb{R}}{R} = \{cl(x) \mid x \in [0, 1)\}$$

(28) En  $\mathbb{R}$  se define  $R: x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$  siendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

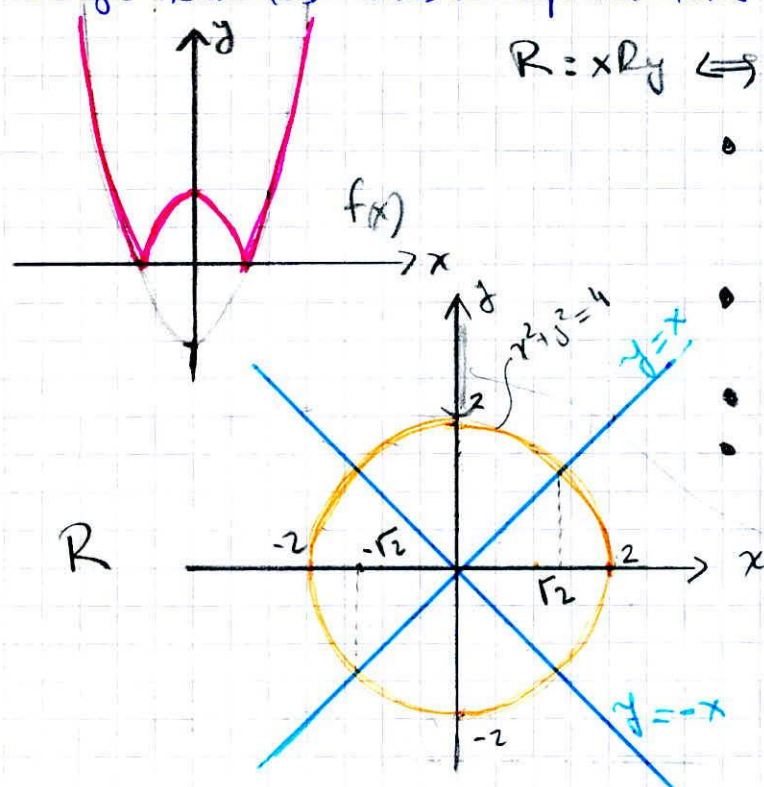
a) Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia, cualquiera sea la función  $f$ .

• Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \stackrel{\text{def. rel.}}{=} f(x) \Rightarrow x R x$  por reflexividad de la igualdad

• Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{R}: x R y \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} f(y) = f(x) \Rightarrow y R x$  por simetría de la igualdad

• Transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x R y \wedge y R z \stackrel{\text{def. rel.}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \stackrel{\text{transitividad de la igualdad}}{\Rightarrow} f(x) = f(z) \Rightarrow x R z$

b) Considere  $f(x) = |x^2 - 2|$ , grafique la función  $f$  y la relación  $R$ . Luego halle los clases de equivalencia y conj. cociente



$$R: x R y \Leftrightarrow |x^2 - 2| = |y^2 - 2|$$

$$\bullet x^2 - 2 = y^2 - 2 \rightarrow |x| = |y|$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\bullet -x^2 + 2 = -y^2 + 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\bullet -x^2 + 2 = -y^2 + 2$$

$$\bullet x^2 - 2 = -y^2 + 2$$

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow |y| = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{cl}(x) = \{x, -x\} \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

$$\text{cl}(2) = \{2, -2, 0\}$$

$$\text{cl}(\sqrt{2}) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

$$\text{cl}(x) = \{x, -x, \sqrt{4-x^2}, -\sqrt{4-x^2}\} \quad \forall x \in (\sqrt{2}, 2)$$

$$\frac{\mathbb{R}}{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [\sqrt{2}, +\infty)\}$$

c) Demuestre que el conj. de índices es un subconjunto en el cual  $f$  es biyectiva

Lo copia de la respuesta de la guía:

Es biyectiva porque debe contener un único elemento pre imagen de cada imagen y deben estar todos

MJ 04

29) En  $\mathbb{R}^+$  se define la relación  $R: xRy \Leftrightarrow |\log(x)| = |\log(y)|$

a) Demuestre que R es de equivalencia x reflexibilidad de la igualdad

- Reflexiva:  $\forall x \in \mathbb{R}^+ : |\log(x)| = |\log(x)| \xrightarrow{\text{def. relac.}} xRx$
- Simétrica:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : xRy \xrightarrow{\text{def. relac.}} |\log(x)| = |\log(y)| \Rightarrow$   
 $|\log(y)| = |\log(x)| \xrightarrow{\text{def. relac.}} yRx$   
la simetría de la igualdad
- Transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ : [xRy \wedge yRz] \xrightarrow{\text{def. rel.}} |\log(x)| = |\log(y)| \wedge |\log(y)| = |\log(z)| =$   
 $|\log(x)| = |\log(z)| \xrightarrow{\text{def. rel.}} xRz$   
x transitividad de la igualdad

b) Indique cuál de los sig. puede considerarse conjunto cociente.:

- A =  $\{ \ln(x) / x \in [1, 2] \}$
- C =  $\{ \ln(x) / x \in (1, +\infty) \}$

- B =  $\{ \ln(x) / x \in (0, 1] \}$**
- D =  $\{ \ln(x) / x \in [10, +\infty) \}$

Es el conj. B pues con  $x \in (0, 1]$  se obtienen todos los valores negativos

30) Sean los conj. A y B donde están definidas dos relaciones de equivalencia  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Demuestre que en el conj.  $A \times B$  la relación R definida:  $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xR_1z \wedge yR_2t$  es una relación de equivalencia también

- Reflexiva:  $\forall (xy) \in A \times B : x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xR_1x \wedge yR_2y \Rightarrow (xy)R(xy)$
- Simétrica:  $\forall (xy), (zt) \in A \times B : (xy)R(zt) \xrightarrow{\text{def. rel.}} xR_1z \wedge yR_2t \xrightarrow{\text{Commut.}} yR_2t \wedge xR_1z \xrightarrow{\text{def. rel.}} (zt)R(xy)$
- Transitiva:  $\forall (xy), (zt), (uv) \in A \times B : (xy)R(zt) \wedge (zt)R(uv) \xrightarrow{\text{def. relac.}} (xR_1z \wedge yR_2t) \wedge (zR_1u \wedge tR_2v) \xrightarrow{\text{Asociativa y commut.}} (xR_1z \wedge zR_1u) \wedge (yR_2t \wedge tR_2v) \xrightarrow{\text{por transitividad (pues } R_1 \text{ y } R_2 \text{ son de equiv.)}} xR_1u \wedge yR_2v \xrightarrow{\text{def. relac.}} (xy)R(uv)$

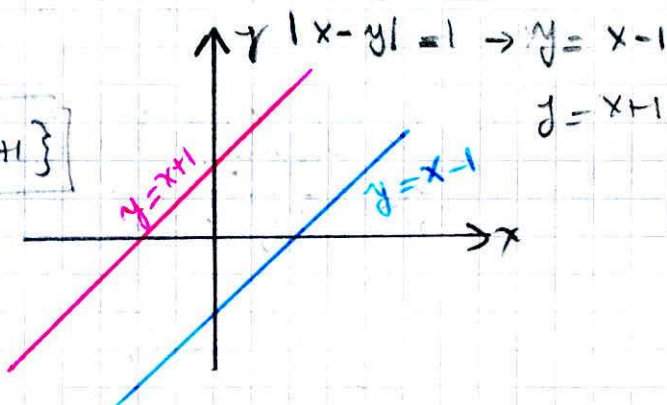
31) Dada la siguiente relación de equivalencia definida en  $\mathbb{R}^2$  tal que:

$$(a,b) R (c,d) \iff (a-b)^2 = (c-d)^2$$

a) Halle la cl  $((2,1))$ , cl  $((3,3))$  e interprete geométricamente

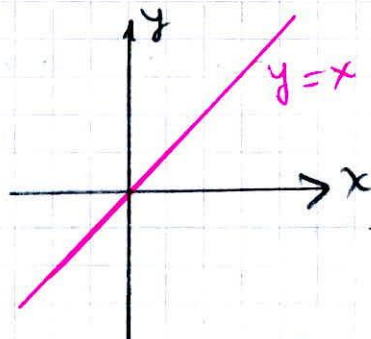
$$\text{cl}((2,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) R (2,1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-y)^2 = (2-1)^2\}$$

$$\text{cl}((2,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x-1 \vee y = x+1\}$$



$$\text{cl}((3,3)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) R (3,3)\} \implies (x-y)^2 = (3-3)^2 \implies |x-y| = 0$$

$$x-y=0 \implies y=x$$



b) Escriba el conjunto cociente

$$\frac{\mathbb{R}^2}{R} = \{ \text{cl}((x,0)) / x \in \mathbb{R}^+ \}$$

32) En  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  se define la rel. de equivalencia:  $(x,y) R (z,t) \iff \exists |x-z|, y^2=t^2$

a) Halle las clases de equiv. de  $(7,4)$ ,  $(0,0)$  y de  $(3,8)$

$$x = 3k + 2, k, t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{cl}((7,4)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / (x,y) R (7,4)\} \implies \exists |x-7| \wedge y^2 = 4^2 \implies x = 3k + 7 \implies x = 3k + 1$$

$$\text{cl}((7,4)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x = 3k + 1 \wedge (y = 2 \vee y = -2)\}$$

$$\text{cl}((0,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x = 3k \wedge y = 0\}$$

$$\text{cl}((3,8)) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x = 3k \wedge (y = 8 \vee y = -8)\}$$

b) Defina correctamente el conj. cociente

$$\frac{\mathbb{Z}^2}{R} = \{ \text{cl}((x,y)) / x \in \{0,1,2\} \wedge y \in \mathbb{Z}^+ \}$$

MD

U4

33) En  $\mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}$  se define  $(a,b)R(f,d) \Leftrightarrow ad = bc$

Demuestre que es una relación de equivalencia, halle el  $cl((1,2))$  y  $cl((-3,1))$ , genere las clases y de la partición que determina

- Reflexiva:  $\forall (x,y) \in \underbrace{[\mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z} - \{0\}]}_A: xy = xy \xrightarrow{\text{def. rel.}} (x,y)R(x,y)$   
simetría =
- Simétrica:  $\forall (a,b), (c,d) \in A: (a,b)R(c,d) \xrightarrow{\text{def. rel.}} ad = bc \xrightarrow{\text{simetría}} bc = ad$   
conmut. producto  
 $\xrightarrow{\text{conmut. producto}} cb = da \xrightarrow{\text{def. relac.}} (c,d)R(a,b)$
- Transitiva:  $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in A: (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \xrightarrow{\text{def. relac.}}$   
 $\Rightarrow ad = bc \wedge cf = de, \xrightarrow{f \neq 0} c = \frac{de}{f}$   
 $\Rightarrow ad = b \cdot \frac{de}{f} \xrightarrow{d \neq 0} af = \frac{bde}{d} \Rightarrow af = be$   
def. relación  
 $\Rightarrow (a,b)R(e,f)$

Clases:

$$cl((a,b)) = \{(x,y) \in A \mid (x,y)R(a,b)\} \Rightarrow xb = ya \Rightarrow x = \frac{ya}{b}$$

$$cl((a,b)) = \{(x,y) \in A \mid y \in \mathbb{Z} - \{0\} \wedge x = \frac{ya}{b}\}$$

$$\text{Partición} = \frac{A}{R} = \{cl((a,b)) \mid \text{mcd}(a,b) = 1\}$$

34) Indique V o F, demostrando o justificando:

a) Si  $S$  es una relación de equivalencia definida en un conj.  $A$ , entonces  $S^{-1}$  también es de equivalencia

$\boxed{V}$   $S^{-1} = \{(y,x) \in A / (x,y) \in S\}$

• Reflexiva:  $S$  reflexiva  $\Rightarrow x S x \Rightarrow (x,x) \in S \Rightarrow (x,x) \in S^{-1}$   
 $\boxed{x S^{-1} x}$

• Simétrica:  $S$  simétrica  $\Rightarrow x S y \Rightarrow y S x$   
 $\forall x,y \in S^{-1}: \boxed{y S^{-1} x \Rightarrow x S y \xrightarrow{\text{def. Inversa}} y S x \xrightarrow{S \text{ simétrica}} x S^{-1} y \xrightarrow{\text{def. Inversa}} y S^{-1} x}$

• Transitiva:  $S$  transitiva  $\Rightarrow x S y \wedge y S z \Rightarrow x S z$   
 $\forall x,y,z \in S^{-1}: x S^{-1} y \wedge y S^{-1} z \Rightarrow y S x \wedge z S y \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{commut.}} z S y \wedge y S x \xrightarrow{S \text{ transitiva}} z S x \xrightarrow{\text{def. Inversa}} \boxed{x S^{-1} z}$

b) Las clases de equivalencia determinados por una relación  $R$  en un conjunto  $A$  son disjuntas  $z a z$

$\boxed{V}$  Las clases de equivalencia forman particiones de un conjunto, y las particiones son subconjuntos disjuntos

c) Si  $R: A \rightarrow A$  y  $S: A \rightarrow A$  son de equivalencia entonces  $R \circ S$  es de equivalencia

$\boxed{V}$  Reflexiva:  $\forall a \in A: (a,a) \in R \wedge (a,a) \in S \xrightarrow{\text{def } \cap} (a,a) \in R \circ S$   
 $\therefore \boxed{a (R \circ S) a}$

• Simétrica:  $\forall (a,b) \in (R \circ S) \xrightarrow{\text{def } \cap} (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S \Rightarrow$   
 $R, S \text{ simétricas} \Rightarrow (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S \Rightarrow (b,a) \in R \circ S$

• Transitiva:  $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in (R \circ S) \wedge (b,c) \in (R \circ S) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow ((a,b) \in R \wedge (a,b) \in S) \wedge (b,c) \in R \wedge (b,c) \in S \Rightarrow$   
 $\xrightarrow{\text{commut. y asociat}} [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \wedge [(a,b) \in S \wedge (b,c) \in S] \Rightarrow$   
 $R, S \text{ transitivas} \Rightarrow (a,c) \in R \wedge (a,c) \in S \xrightarrow{\text{def } \cap} \boxed{(a,c) \in (R \circ S)}$

d) Si  $R: A \rightarrow A$  y  $S: A \rightarrow A$  son de equivalencia entonces  $R \cup S$  es de equivalencia

$\boxed{F}$   $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}, S = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$

$R \cup S = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c), (c,a)\}$

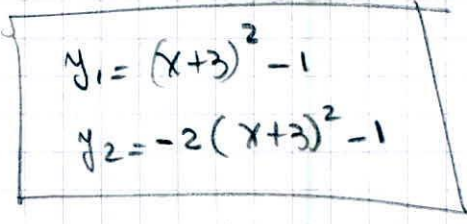
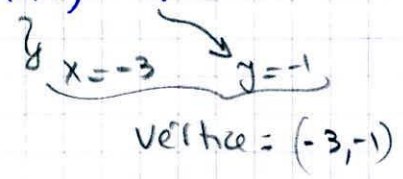


$c R a \wedge a R b$   
 pero  $c \notin R b$

35) Si se considera la relación de equivalencia definida en el conjunto  $\mathcal{P}$  de parábolas del plano con eje vertical:

$p_1 \sim p_2 \iff$  tienen el mismo vértice

a) Señale dos elementos de la clase de equivalencia de la parábola  $p: y = 2(x+3)^2 - 1$



b) Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente a la relación  $\sim$

$p: y = m(x-a)^2 + b$   
 ↑  
 parábola

$$\mathcal{C}(p) = \{ y = k(x-a)^2 + b, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$

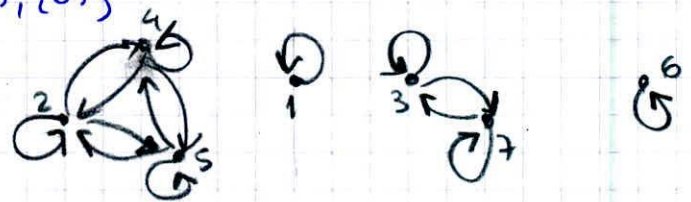
$$\text{conj. cociente} = \frac{\mathcal{P}}{\sim} = \{ \mathcal{C}(p) \mid y = (x-a)^2 + b, a, b \in \mathbb{R} \}$$

36) Sea el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  indique cuáles de los sig. conjuntos son particiones de  $A$ , justificando. Para los que sean haga el digrafo de la relación de equiv. asociada

a)  $\mathcal{P} = \{ \{3, 4, 5\}, \{1, 7\}, \{2\} \}$  F Falta el 6,  $\{3, 4, 5\} \cup \{1, 7\} \cup \{2\} \neq A$

b)  $\mathcal{P} = \{ \{2, 4, 5\}, \{1\}, \{3, 7\}, \{6\} \}$

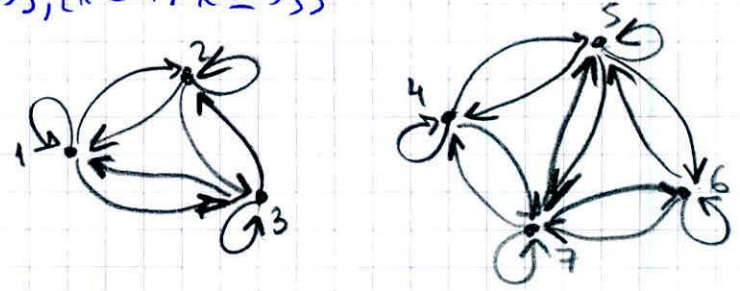
V



c)  $\mathcal{P} = \{ \{4, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{2, 5\} \}$  F no son disjuntos  $\{1, 2, 3, 7\} \cap \{2, 5\} = \{2\} \neq \emptyset$

d)  $\mathcal{P} = \{ \{x \in A \mid x > 3\}, \{x \in A \mid x \leq 3\} \}$

V



e)  $\mathcal{P} = \{ \{x \in A \mid x \leq 4\}, \{x \in A \mid x > 4 \wedge x \leq 5\}, \{x \in A \mid x > 5\} \}$

F

$\rightarrow \emptyset$